單擺 實驗講義 (版本 1.10d)

112 年國科會科教實作學門計畫：數位輔助科教實作-振盪的探究實驗

計畫主持人：曾賢德

■ 目的

本計畫以高中、大學為主要對象，以振盪現象為科學探究主軸，開發一系列可供動手操作的實驗，並結合數位化工具，可進行更好的定量紀錄分析及更深入的探究。實驗器材方面使用智慧型手機及 Phyphox 程式，讀取加速度感測器、陀螺儀、磁場感測器之訊號，結合雷射切割木板支架與容易取得的實驗零件，進行幾個振盪相關實驗。希望能啟發及引導學員將數位科技運用於科學探究上，並強化數據分析能力。

完整之教材內容共有四個實驗主題，包含單擺、簡諧運動、扭擺、耦合(威伯福斯擺、板彈簧振盪與耦合)。

本教材為實驗主題一「單擺」實驗，包含以下子實驗:

- 實驗 1A: 測量單擺週期 T 與繩長 s 的關係
- 實驗 1B [自選探究實驗]: 探究擺錘質量是否影響週期
- 實驗 1C: 以手機測量擺動週期
- 實驗 1D [自選探究實驗]: 探究振幅是否影響週期
- 實驗 1E [進階]: 複擺實驗-由週期與力臂距離關係得到轉動慣量

其他實驗主題請見其他講義。講義雲端資料夾:

https://drive.google.com/drive/folders/1_YnEaS9zeoATjzgVf_6HyjWRzk3gOuxu?usp=sharing

更多計畫成果可參考 自造實驗基地計畫 網址: https://sites.google.com/view/lab-maker

■ 原理

簡述:

單擺(英文 simple pendulum)，顧名思義指的是簡單的擺。一般我們將單擺定義成一個有質量的小物體(質點)，被一條不計質量的細繩連接，細繩另一端固定(固定點稱為支點)。當推動一下物體使它微幅擺動時，來回擺動一次的時間(稱作週期)具有等時性，亦即每次來回的時間間隔相同。

公式與推導:

- 單擺週期 [適合高二以下]

當一單擺系統的擺長固定且以小幅度來回擺動時。由推導(如後)可得週期公式

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{1}$$

其中 T 為單擺週期、l 為擺長、g 為重力加速度，在地表上 $g \approx 9.80\ \mathrm{m/s^2}$。若對(1)式等號兩邊同時取平方，可得

$$T^2 = 4\pi^2\frac{l}{g} = \left(\frac{4\pi^2}{g}\right)l \tag{2}$$

由(2)式可知，週期平方 (T^2) 與 擺長 l 成正比，且可由 T^2 對 l 作圖的斜率 $\left(\frac{4\pi^2}{g}\right)$，

求得重力加速度 g。

- 單擺週期公式進階推導 [適合高三、大專以上]

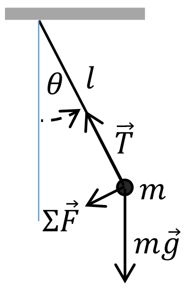
當繩子懸掛一物體時，輕推物體會使物體來回擺動。如圖一所示，若物體可視為一個質量為 m 的質點，繩子長度為 l 且可忽略繩子質量及空氣阻力，則質點 m 的受力總合 $\Sigma\vec{F}$ 可寫成

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{g} + \vec{T} \tag{3}$$

其中 $\vec{g}$為重力加速度，地表附近 $g \approx 9.8$ m/s，指向地心。$\vec{T}$ 為繩子張力，方向指向繩子拉的方向。若擺動時繩子維持伸直且長度不變，則質點 m 在繩子拉的方向上的運動速度為零、加速度為零，合力也為零。亦即合力$\Sigma\vec{F}$ 在繩子拉的方向上的分量為零：

$$T - mg\cos\theta = 0$$

其中，θ 為繩子與垂直線夾角。由此可得張力大小 $T = mg\cos\theta$。此外，合力方向垂直於繩子張力 $\vec{T}$ 的方向，大小為 $\Sigma F = -mg\sin\theta$。式中負號表示合力ΣF的方向與角度θ方向相反。



(圖一) 單擺力圖。

由牛頓第二運動定律 $\vec{F} = m\vec{a}$ 可得 $\Sigma F = -mg\sin\theta = ma$，其中 a 為 m 沿著弧線方向(運動軌跡的切線方向)的加速度。此式可寫成微分方程式

$$ma = m\frac{d^2}{dt^2}s = -mg\sin\theta = 0 \tag{4}$$

上式中 t 為時間，$s = \theta l$ 為弧線軌跡最低點算起的弧線長度。因此

$$m\frac{d^2}{dt^2}(\theta l) + mg\sin\theta = 0 \tag{5}$$

因為(5)式中的各項都有質量 m，各項除以 m 後可改寫成

$$\frac{d^2}{dt^2}\theta - \frac{g}{l}\sin\theta = 0 \tag{6}$$

假設擺動的角度幅度不大，在 θ 相當小時(例如 θ 在$\pm 5°$ 以內)， $\sin\theta \approx \theta$ ，因此

$$\frac{d^2}{dt^2}\theta - \frac{g}{l}\theta = 0 \tag{7}$$

此種微分方程式的解，為來回的振盪行為

$$\theta(t) = A\sin(\omega t + \phi) \tag{8}$$

其中，A 為振幅(單側擺動的幅度)，ϕ為時間 $t = 0$ 時的初始相位。而$\omega = \frac{2\pi}{T}$ 為擺動的角頻率，T 為擺動週期。將(8)式帶進(7)式檢驗，可得 $\omega^2 = g/l$，或 $\frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{g}{l}}$ ，因此可得

週期 T 為

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{9}$$

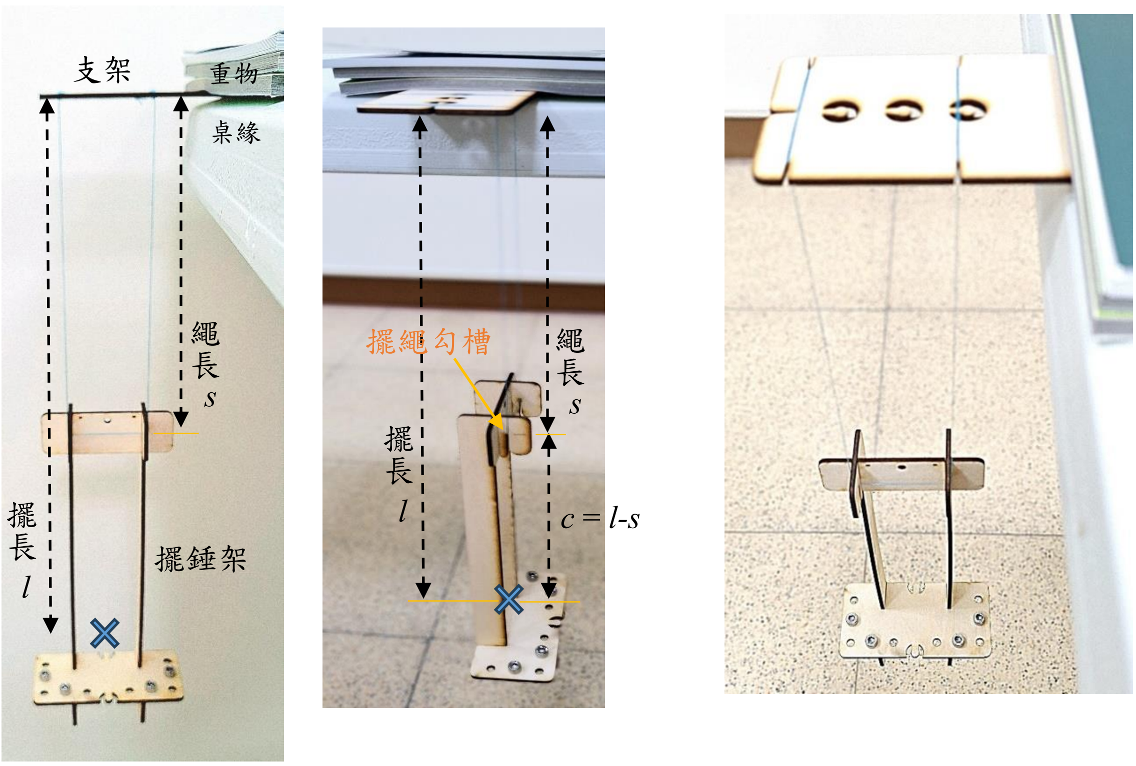
此結果表示，在擺動的角度幅度甚小，繩子質量及空氣阻力影響可忽略，且質量 m 可視為一質點時，單擺的擺動週期 T 只與擺長 l 及重力加速度 g 有關，與質點質量 m 無關。

[探究問題] 實驗中實際的單擺擺錘可能無法視為質點，有空氣阻力及其他阻力，且擺幅可能較大，這些因素如何影響運動週期是可以進一步探究的問題。

- 擺錘非質點時，如何代表擺錘整體位置的某處

　　當一細繩掛一擺錘時，如果此擺錘的尺寸相比於繩長不能忽略，則不能將繩長 s 當作是擺長 l，如圖二所示。

這裡的擺長 l，指的是滿足(1)式關係的某個長度，此長度應該會是從支點到擺錘中間，代表擺錘整體位置的某處。這裡的某處或許很接近擺錘的質心(質量中心)位置，但擺長 l 是否正好就是質心到支點的長度，是可以進一步探究的問題。



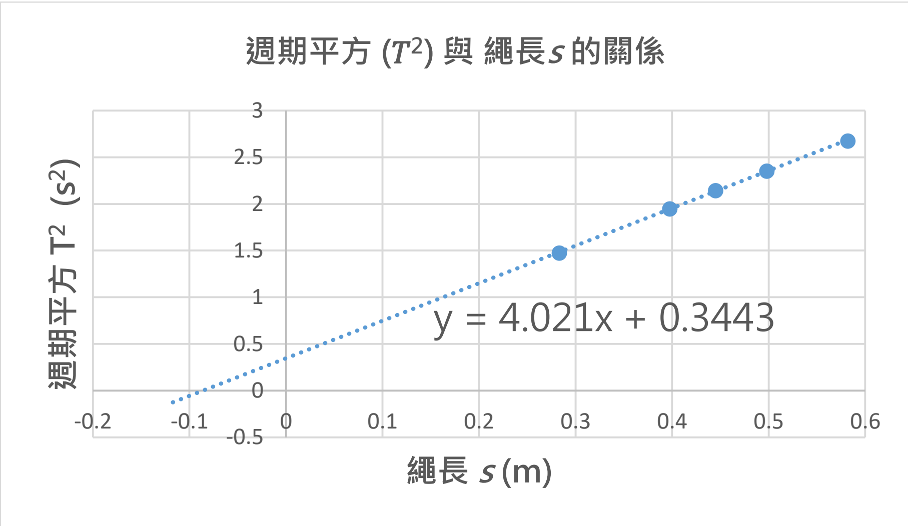
(圖二) 單擺實驗裝置的正面視角(左圖)、側面視角(中圖)及斜視角(右圖)，以及 l、s 及 a 的示意長度。其中，代表擺錘整體位置的「某處」(X 處)僅為示意，實際位置可透過實驗得到。

假設代表擺錘整體位置的某處位於擺繩末端往下 c 的距離，亦即擺長 l = s+c。我們可以從以下實驗原理，找出距離 c。

若將(2)式中的 擺長 l 用 $l = s+c$ 代入，可得

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{g}\right) l = \left(\frac{4\pi^2}{g}\right)(s+c) = \left(\frac{4\pi^2}{g}\right) s + \frac{4\pi^2}{g} c \qquad (10)$$

由上式可知，週期平方 (T^2) 與 繩長 s 呈線性關係，亦即若將 週期平方 (T^2) 作為 y 值，繩長 s 作為 x 值，則週期平方 (T^2) 對 繩長 s 變化的數據在 x-y 圖中會是直線的關係，且可以在數據擬合時使用線性方程式 $y= a\,x + b$ 來描述。其中，斜率 $a = \left(\frac{4\pi^2}{g}\right)$，因此可以從斜率 a 得到重力加速度的實驗值 $g = \left(\frac{4\pi^2}{a}\right)$。而常數項(擬合線與 y 軸交點) $b = \frac{4\pi^2}{g}c$，由此可得 $c = b/\left(\frac{4\pi^2}{g}\right) = b/a$。



(圖三) 週期平方隨繩長變化的數據圖範例。

圖三為 週期平方 (T^2) 對 繩長 s 變化的數據圖範例，由此數據擬合得到的線性方程式為 $y = 4.021x + 0.3443$，因此 $a = 4.021$，$b = 0.3443$，由此求得的重力加速度的實驗值 $g = \left(\frac{4\pi^2}{a}\right) = \left(\frac{4\times 3.14\times 3.14}{4.021}\right) = 9.81 \ \ m/s^2$，距離 $c = b/a = 0.3443/4.021 = 0.086 \ \ m = 8.6 \ \ cm$。

[探究問題] 代表擺錘整體位置的「某處」，是否離質心位置很接近？這個「某處」是否就是質心？當擺錘質量(配重，例如螺絲數量)改變時，這個「某處」的距離 c 是否會改變？

■ 實驗器材

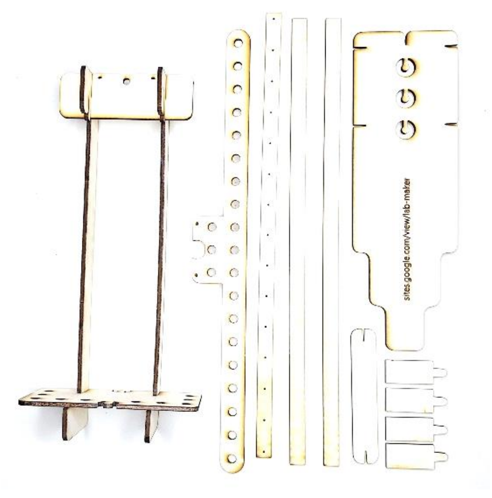
實驗器材

品項	數量	備註
木架	1	雷射切割木板，svg 檔案分享在雲端資料夾。
細線	1	1 捲。
捲尺	1	1 個。
燕尾夾	3	3 個。
不鏽鋼螺絲	10	M5 螺絲(長 8 mm)，每個質量約 2.70 公克、 M5 螺帽，每個質量約 1.06 公克。
橡皮筋	--	大、小，數條。
金屬彈簧	1	外徑約 35 mm，內徑約 33 mm，高約 30 mm。
小磁鐵	3	3 個。尺寸: 直徑約 10 mm，厚度約 3 mm。
迴紋針	1	1 個。
隨意貼	1	黏土，用於輔助固定零件。

自備器材

智慧型手機	安裝 phyphox。官方網址 https://phyphox.org/
壓重物	例如一疊書本。
一般文具	剪刀、直尺、筆、筆記本 (實驗紀錄簿)等等。
電腦	使用試算表程式，做實驗記錄與數據分析。

*建議準備電子秤(精度 0.01 公克或 0.1 公克)



雷射切割木架

實驗零件

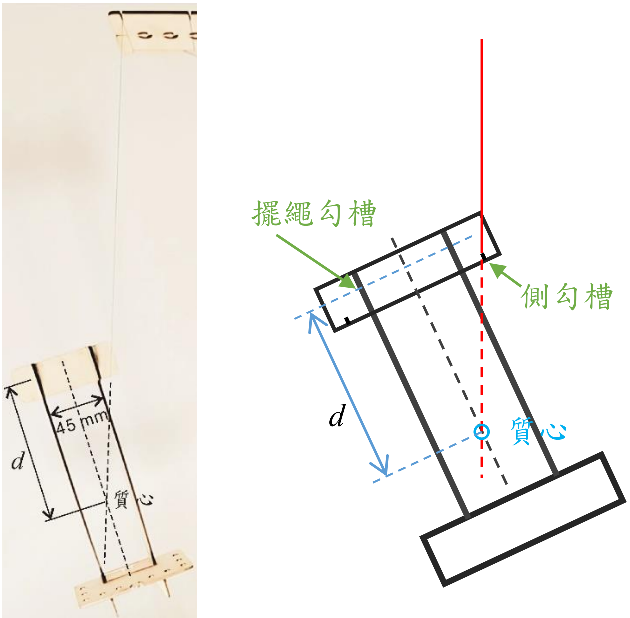
■ 實驗步驟

● **實驗 1A: 測量 單擺週期 T 與 繩長 s 的關係**

1. 看以下影片教學或老師示範，學習如何架設單擺實驗裝置。
   教學影片: 單擺實驗 實驗裝置組裝與介紹 (https://youtu.be/AalORN0221U)
2. 如上述影片示範，取適當長度的細繩(例如 1.5 米)，末端打結後繞於支架兩側的凹槽。使繞有細繩的一半支架伸出桌緣，另一半支架於桌面上用重物(例如書本)壓住，如圖二右圖。將擺錘架掛到細繩上，可以增加或減少細繩繞於支架兩側凹槽的圈數，以調整適當的繩長。
3. 將螺絲(例如 4 個)對稱鎖到擺錘架上，調整擺錘架使兩側細繩繩長一樣。使擺錘前後來回擺動，觀察擺錘是否能穩定擺動(不左右扭動)。若有左右扭動的狀況，檢查兩側細繩繩長是否一樣長，以及擺錘配重是否對秤。
4. 看以下影片教學或老師示範，學習如何測量繩長與週期。
   教學影片: 單擺實驗 繩長與週期測量 (https://youtu.be/3UNB98cTGYo)
5. 用捲尺測量細繩繩長 s。此繩長指的是從支架底部算起，到擺錘架勾住細繩的位置，如圖二。於實驗記錄簿(及試算表)上紀錄繩長 s。(例如: 繩長 s = 25.8 cm)
6. 使擺錘前後來回擺動，待擺動穩定時，以碼錶(或手機碼錶程式)紀錄擺錘來回擺動多次(例如 10 次，或自訂次數)的時間，紀錄於實驗記錄簿(及試算表)上。在試算表中將時間除以擺動次數，得到平均週期 T。
7. 重複上述步驟，得到至少 3 次的平均週期 T。[思考: 同樣的實驗條件為何要多次測量?]
8. 調整繩長(增加或減少細繩繞於支架兩側凹槽的圈數)，用捲尺測量新的繩長 s。
9. 重複步驟 6、7，得到新繩長條件下的平均週期 T(至少測量 3 次)。
10. 重複步驟 8、9。總共得到至少 5 個不同繩長條件下的多次平均週期 T。
11. 將上述實驗數據紀錄於實驗記錄簿(及試算表)上。用試算表畫出 週期 T(y 軸) 隨 繩長 s(x 軸) 的變化趨勢圖。若對試算表之使用不熟悉，可參考 "實驗 1A 數據範例.xlsx"。
    [觀察與分析: 趨勢圖中，週期 T 隨 繩長 s 的變化是否是線性(直線)的關係?]
12. 在試算表中算出各組數據的 週期平方(T^2)，畫出 週期平方(T^2) 與 繩長 s 的關係圖。將數據做 "線性擬合"，得到線性方程式 $y = a\,x + b$ 的係數 a 與 b。
13. 求出重力加速度的實驗值 $g = \left(\frac{4\pi^2}{a}\right)$。求出代表擺錘整體位置的距離 $c = b/a$。
14. 比較重力加速度的實驗值與理論值(地表上參考值g ≈ 9.80 m/s^2)，計算兩者誤差。

    誤差計算方法： $\frac{(\text{實驗值}-\text{理論值})}{\text{理論值}} \times 100\%$， 例如 $\frac{(9.81-9.80)}{9.80} \times 100\% = 0.1\%$

15. [自選步驟] 得到質心的位置。因為單擺靜止時質心會位於支點正下方，可利用此一特性找出質心位置，得到質心距離 d。原本細繩是勾在擺錘架的擺繩勾槽上，取下擺錘架，改將細繩勾在一邊側勾槽上，如圖四所示。此時擺錘架會傾斜。拍攝一張擺錘架照片，從圖片中將擺繩(垂直線)延伸，與擺錘架中央軸交會的地方即為質心位置。測量質心到擺繩勾槽勾住細繩高度的距離 d(沿中央軸方向的距離)。比較 c 與 d 值是否一樣。
    [思考: 理論上應該一樣嗎? 可以在做過實驗 1E 複擺實驗之後再回來思考此問題]

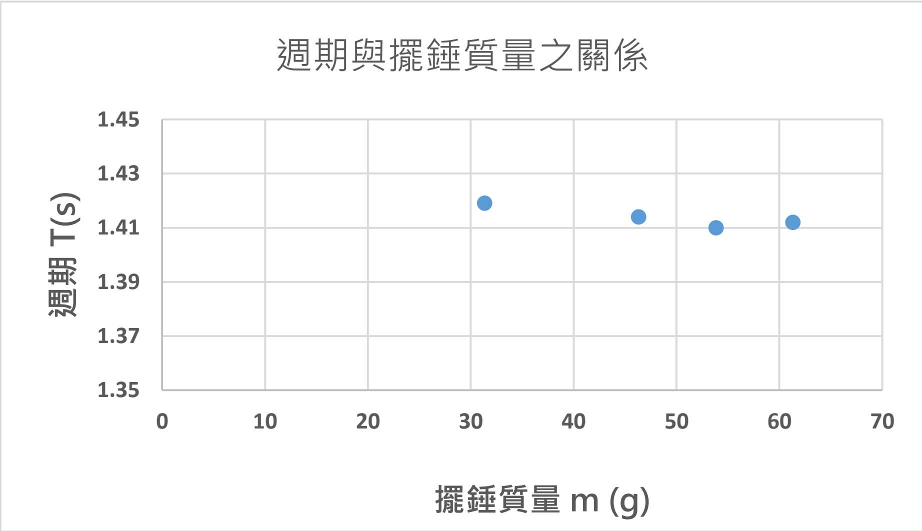


(圖四) 測量質心位置，範例照片(左)與示意圖(右)。

- **實驗 1B [自選探究實驗]: 探究擺錘質量是否影響週期**

1. 完成實驗 1A 的各項操作，知道如何測得週期 T，及推算擺錘整體位置的距離 c。
2. 固定繩長 (例如取繩長 $s \approx 25$ cm)，先在擺錘架底板對稱位置鎖上 10 組(或適量的)螺絲，測量此時的週期 T。
3. 參考實驗 1A 的步驟 14，利用質心會位於支點正下方的沿線上，找出質心位置，得到質心距離 d。
4. 不改變繩長，但改變擺錘架底板上的螺絲組數。測得此條件下的週期 T 與質心距離 d。
5. 不改變繩長，但取下擺錘架底板上的所有螺絲。測得此條件下的週期 T 與質心距離 d。
6. 得到至少 3 種以上不同擺錘質量的週期 T 與質心距離 d。
7. 以週期 T 對擺錘質量 m 作圖，觀察兩者的關係。

   [思考: 擺錘質量是否影響週期，甚麼條件下會明顯影響，甚麼條件下幾乎沒有影響。]



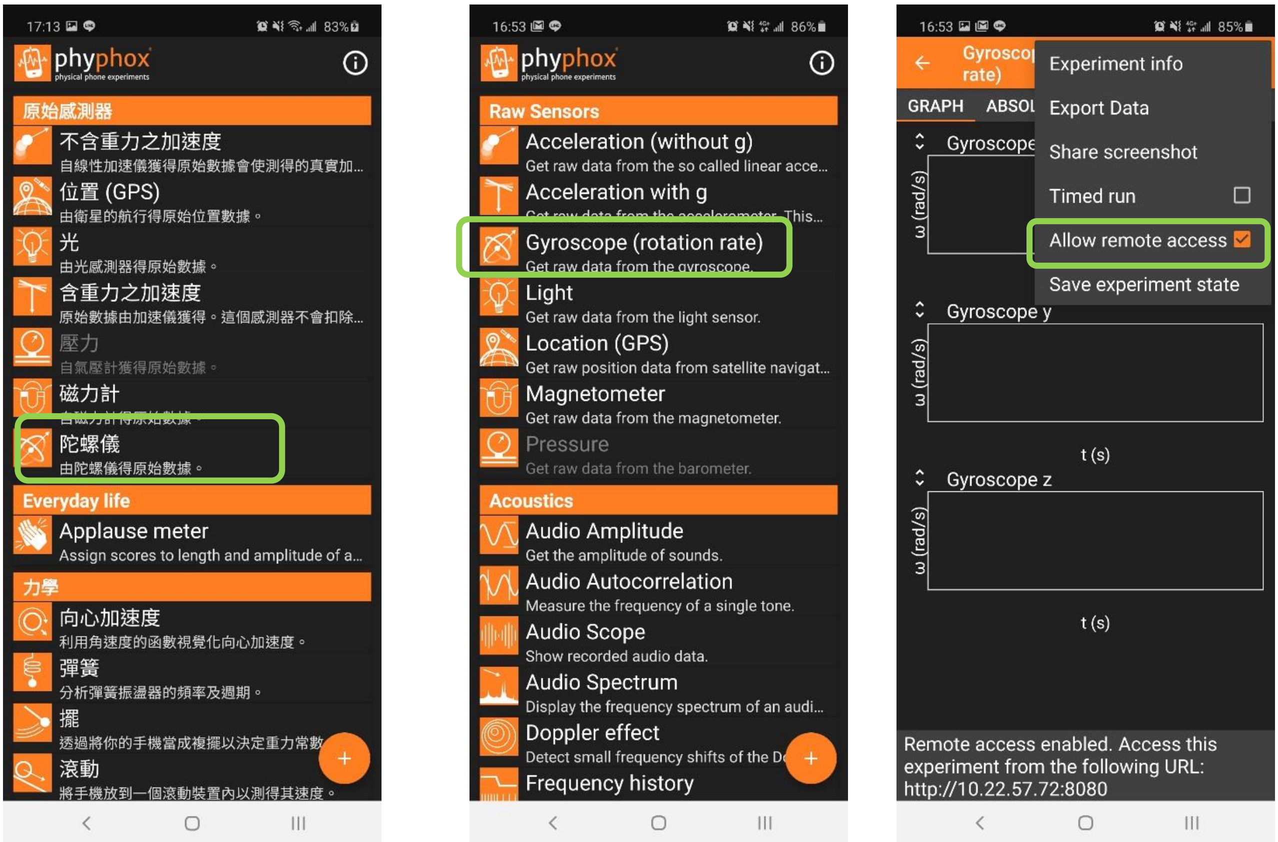
(圖五) 週期隨擺錘質量的變化的數據圖範例。

- **實驗 1C：以手機測量擺動週期**

1. 看以下影片教學或老師示範，如何將智慧型手機固定於擺錘架上。
   教學影片：單擺實驗 以手機結合單擺 測量擺動週期 (https://youtu.be/arnfINdVLsc)
2. 在智慧型手機上安裝 phyphox 應用程式。網址 https://phyphox.org/
3. 將智慧型手機固定於擺錘架上(但先不要掛到擺繩上)。注意：需自備智慧型手機，實驗及操作時務必小心，勿摔落手機，以免受損。
4. 測試手機感測器。啟動擺錘架上手機的 phyphox 應用程式。可選擇「陀螺儀 (Gyroscope)」進行實驗，如圖六所示。在陀螺儀 (Gyroscope)畫面中，啟動偵測(點螢幕畫面右上三角形)，用手輕輕轉動手機，觀察手機擺動時 x、y、z 三個方向的轉動角速率變化。各方向定義請見教學影片說明。

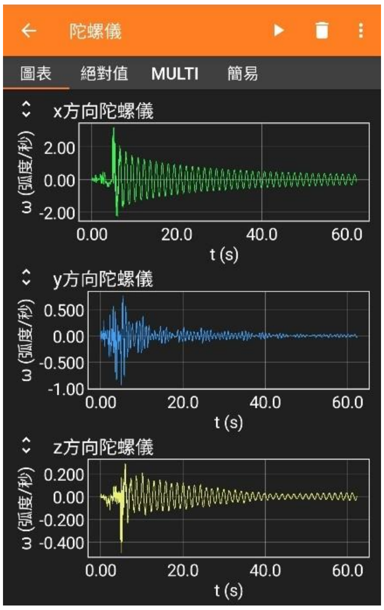
   註：陀螺儀可測角速率的值ω，亦即角度θ隨時間 t 的變化率 $\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$，單位為 rad/s。

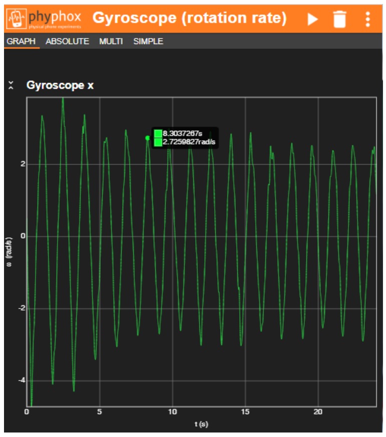
   註：各實驗依狀況亦可選擇使用「不含重力之加速度 (Acceleration without g)」。
5. [自選] 必要時，可啟動允許遠端存取，在電腦或其他連線裝置上，操作或觀察 phyphox 的感測器數據。可在數據圖畫面點選手機螢幕右上角的設定(⋮) 並勾選 允許遠端存取 (Allow remote access)，手機螢幕下方會出現一連線網址(例如 http://xxx.xxx.xx.xx:8080)，如圖六所示。用電腦或其他連線裝置(例如另一台手機)以瀏覽器開啟此一網址，應可看到與手機 phyphox 應用程式相同的畫面。連線後亦可使用瀏覽器遠端操作 phyphox 介面。



(圖六) 智慧型手機 phyphox 應用程式的選單。(左)中文介面，(中)英文介面。(右)phyphox 實驗選單中，可點選右上角的設定(⋮)並勾選允許遠端存取(Allow remote access)，下方會出現連線網址。

6. 先確定壓在桌面支架上的重物夠重，以免手機掛上後無法支撐而摔落地面。將手機(與擺錘架)透過擺錘架掛勾將其懸掛於擺繩上，測量擺繩長度 s。
7. 啟動陀螺儀紀錄數據，將擺錘(含手機)拉一個適當角度後放開，使手機來回擺動。一段時間之後，停住擺錘的擺動，暫停紀錄數據(點螢幕畫面右上 ‖)。從得到的振盪曲線，選取不同時間範圍的局部振盪高點數據，將其振幅(此指角速率局部最大值)與對應的時間記錄於試算表中。可選取多處(不同時間)的數據並記錄之。





(圖七) 在 phyphox 實驗的介面上點選執行，可開始讀取 x、y、z 三個轉軸的轉動角速率。(左)中文介面，(中)英文介面。(右)點選數據圖左上角的放大()，可放大某一數據圖。將滑鼠游標移到數據點上，會顯示該數據點的數值資料。

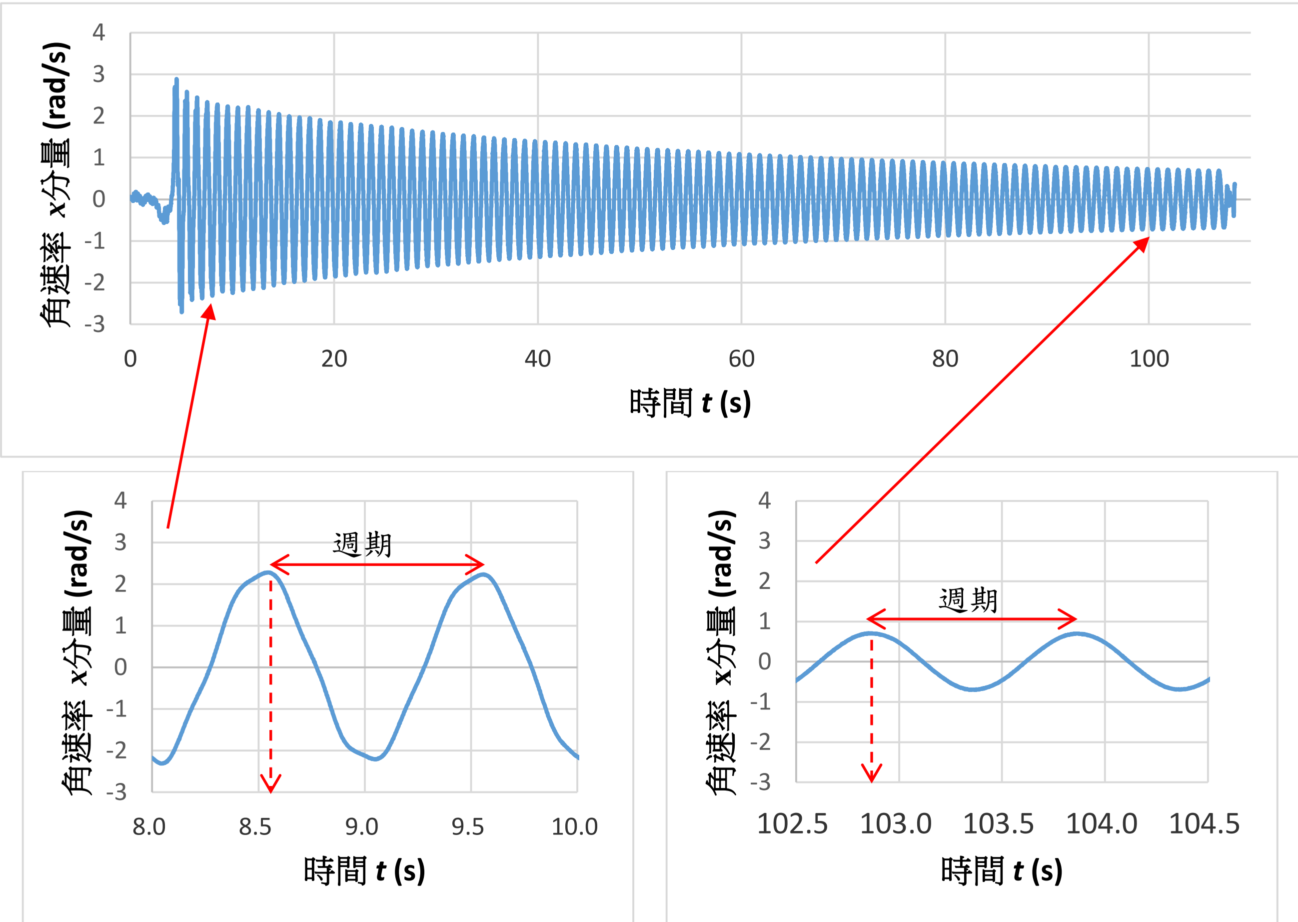
8. 從上一步驟所得的振盪數據，選取數個高峰的間隔，得到多次振盪的時間，再平均得到振盪週期 T。將所得的平均週期紀錄於實驗記錄簿(及試算表)上。
9. 改變繩長 s，重複步驟 8，得到至少 5 個不同繩長條件下的平均週期 T。
10. 將上述實驗數據紀錄於實驗記錄簿(及試算表)上。用試算表畫出 週期 T (y 軸) 隨 繩長 s (x 軸) 的變化趨勢圖。若對試算表之使用不熟悉，可參考 “實驗 1 參考數據.xlsx”。
    [觀察與分析: 趨勢圖中，週期 T 隨 繩長 s 的變化是否是線性(直線)的關係?]
11. 在試算表中算出各組數據的 週期平方(T^2)，畫出 週期平方(T^2) 與 繩長 s 的關係圖。將數據做 “線性擬合”，得到線性方程式 $y = a\,x + b$ 的係數 a 與 b。
12. 求出重力加速度的實驗值 $g = \left(\frac{4\pi^2}{a}\right)$。求出代表擺錘整體位置的距離 $c = b/a$。
    [觀察與分析: 由所得的距離 c，推出代表擺錘整體的位置，其是否約為手機的正中央?]
13. 比較重力加速度的實驗值與理論值(地表上參考值 $g \approx 9.80$ m/s^2)，計算兩者誤差。

$$\text{誤差計算方法：}\ \frac{(\text{實驗值}-\text{理論值})}{\text{理論值}} \times 100\%\text{，}\quad \text{例如}\ \frac{(10.02-9.80)}{9.80} \times 100\% = 2.2\%$$

[觀察與分析: 於此實驗得到的重力加速度 g 的誤差，與你在實驗 1A 得到的誤差相比，是否誤差更大? 可能的原因為何? 可以在做過實驗 1E 複擺實驗之後再回來思考此問題]

- **實驗 1D [自選探究實驗]: 探究振幅是否影響週期**

1. 依照實驗 1C，將手機架設至擺錘架上，啟動 phyphox 陀螺儀(或加速度計)功能。
2. 將手機從較大的夾角(例如 45 度角)釋放，長時間紀錄振盪訊號(陀螺儀紀錄角速率 x 分量 ω_x；或加速度計 z 分量a_z)的振幅隨時間慢慢變小的過程。直到振盪振幅變得相當小為止。
3. 分析以上振盪隨時間變化的數據，挑選幾個不同振幅的時間點，記錄該時間 t (某個局部振盪最高點的時間)、時間 t 時的振幅、時間 t 時的週期(與下一個振盪最高點的時間差)。



	時間 t (s)	局部振幅 (rad/s)	下個高峰的時間 (s)	週期 T (s)
1	8.55	2.277	9.57	1.02
2				
3				

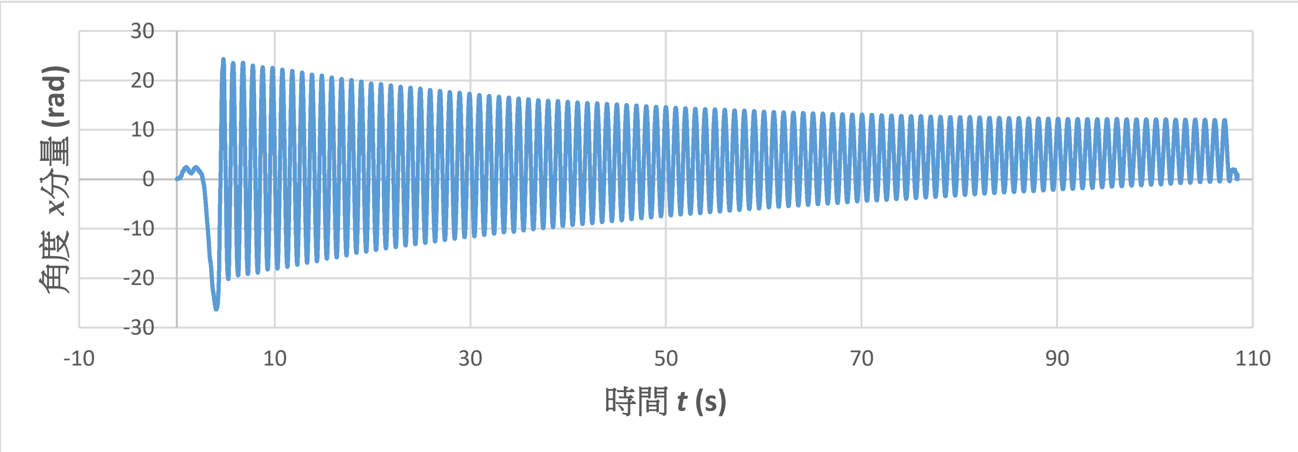
(圖八) 振盪(陀螺儀角速率 x 分量ω_x)隨時間 t 變化的數據圖範例。左下數據顯示時間 t = 8.55 秒時，振幅為 2.277 rad/s，週期約 1.02 秒；右下數據顯示當時間 t = 102.86 秒時，振幅已減為 0.707 rad/s，週期約 1.00 秒。

4. 由以上數據，畫出週期 T 隨振幅(角速率或加速度)的變化。說明兩者的關聯，並嘗試解釋原因。由數據或理論，推論當振幅達到多少以上時，週期 T(與振幅微小時相比)會有超過 5%

的變化?

5. [進階] 為了得到角度的振幅(而非角速率的振幅)，可以從角速率隨時間的變化推算出各時間點的角度。理論如下:

   角速率ω的定義為角度θ的變化率: $\omega = \frac{d\theta}{dt}$，因此角度在小小時間變化$dt$的期間，改變了$d\theta = \omega dt$。實驗時前後兩個數據點之間有一個時間差$\Delta t$，將其乘上當時的角速率$\omega$可得到兩數據點之間的角度變化為 $\Delta\theta = \omega\ \Delta t$。將各時間求得的$\Delta\theta$累加，即可得各時間 t 的角度 θ。計算細節可參考雲端資料夾上的 實驗 1D 數據範例。



(圖九) 由陀螺儀角速率 x 分量ω_x隨時間 t 變化的數據，可“積分”推算出振盪角度隨時間的變化。上圖為由圖八的數據計算所得的結果，可見實際振幅一開始約為 20 度，後來減到約 6 度的振幅。(註: 因時間 t=0 時單擺的角度未必也是在 0 度，可修正原點，將所有角度值平移。)

6. [進階] 由以上數據，畫出週期 T 隨角度振幅的變化。說明兩者的關聯，並嘗試解釋原因。由數據或理論，推論當角度振幅達到多少以上時，週期 T(與振幅微小時相比)會有超過 5%的變化?

   [提示: 式(7)所得的方程式應該得到週期與振幅無關的簡諧運動，但從式(6)推得式(7)的過程假設了 $\sin\theta \approx \theta$。實際上當 θ =20 度=0.349 rad 時，sin(0.349) ≈ 0.342。兩者差約 2%]

7. [進階] 由以上數據可得角度振幅 A 隨時間 t 的變化，將兩者的關係作圖。當振幅隨時間做指數衰減，可用“指數擬合”得到指數方程式 $y=a\,e^{-bx}$ 的係數 a 與 b。其中，係數 b 的倒數為衰減時間，而半衰期 $T_{1/2} = \frac{ln(2)}{b} \approx 0.693/b$。

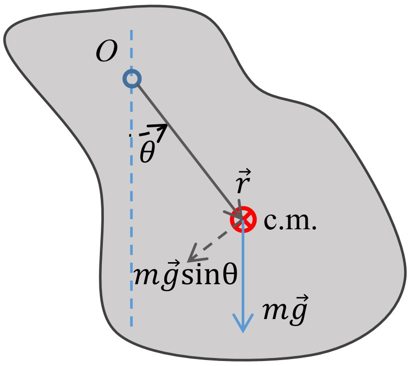
   [註: 此半衰期與系統的阻力係數有關，相關概念可參考實驗三扭擺]

- **實驗 1E [進階]: 複擺實驗-由週期與力臂距離關係得到轉動慣量**

建議: 若對於轉動慣量 I 的概念尚未熟悉，可先完成實驗三扭擺之後再進行本實驗。

1. 理論補充:

在先前的單擺中，把擺錘當作一個質點，且細繩不計質量。但一個實體的擺 (稱為複擺，或物理擺，英文: Physical Pendulum) 可以是比較複雜的形狀。例如以下質量為 m 的物體，以 O 點的位置為轉軸，從轉軸指向質心(Center of Mass, c.m.)的位置向量為 $\vec{r}$ (此向量包含長度與方向)。



(圖十) 複擺的力分析示意圖。

在均勻重力場(重力加速度$\vec{g}$)中，物體受到重力 $\vec{F} = m\vec{g}$ 而產生的重力力矩總和可以看成是物體質量全部集中於質心處產生的重力力矩，亦即

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times m\vec{g} \qquad (11)$$

如圖十，當 $\vec{r}$ 方向與重力方向有一個夾角 θ，則此時的重力力矩大小為

$$\tau = |\vec{r} \times m\vec{g}| = -rmgsin\theta \qquad (12)$$

此一 力矩τ 可以產生轉動速度(角速度ω)的變化，此一變化率稱為角加速度 $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$。力矩與角加速度之間的關係，類似於力 F 與加速度 a 之間的關係 (牛頓第二運動定律 $F = ma$)，可得

$$\tau = I\alpha \qquad (13)$$

其中，I 是轉動的慣性，稱為轉動慣量。轉動慣量與物體質量分佈有關，其定義為

$$I = \sum_i m_i {r_i}^2 \qquad (14)$$

式中 m_i 是物體上某一個小質量，r_i 則是這個小質量到轉軸之間的距離。質量越大，或距離轉軸越遠，對轉動慣量的貢獻越大。此外，轉動軸位置也會影響轉動慣量的大小。

由(12)式與(13)式可得

$$\tau = -rmgsin\theta = I\alpha = I\frac{d\omega}{dt} = I\frac{d^2\theta}{d^2t} \qquad (15)$$

假設擺動的角度幅度不大，在 θ 相當小時， $\sin\theta \approx \theta$ ，因此上式可改寫成

$$\frac{d^2}{dt^2}\theta + \frac{mgr}{I}\theta = 0 \qquad (16)$$

此與之前的單擺運動的微分方程式(6)式類似，也有相似的解，只是角頻率的平方變成是 $\omega^2 = \frac{mgr}{I}$，因此週期 T 的公式變為

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgr}} \qquad (17)$$

當圖十的複擺變成質量僅出現在質心位置的單擺，則質心位置向量的大小 $r=$ 擺長l，轉動慣量為$I=ml^2$，因此(17)式 $T=2\pi\sqrt{\frac{I}{mgr}}=2\pi\sqrt{\frac{ml^2}{mgl}}=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$，變回單擺公式。

關於轉動軸位置對轉動慣量的影響，有一個實用的公式稱為平行軸定理: 若 $I_{c.m.}$ 為通過質心的一個轉軸所得的物體轉動慣量。而當轉軸平行移動到距離質心 d 的位置時，轉動慣量會變成

$$I=I_{c.m.}+md^2 \tag{18}$$

套用到圖十複擺的例子，距離質心 d 等於質心位置向量的大小 r，將此結果帶入複擺的週期公式(17)式，可得

$$T=2\pi\sqrt{\frac{I_{c.m.}+md^2}{mgd}} \tag{19}$$

或

$$T^2d=\frac{4\pi^2}{g}d^2+\frac{4\pi^2\ I_{c.m.}}{mg} \tag{20}$$

實驗上可以針對不同的質心距離 d，測得複擺微幅擺動的週期 T，將 T^2d 作為 y 軸，d^2 作為 x 軸作圖，則數據應為線性關係，可用線性擬合得到線性方程式 $y=a\,x+b$ 的係數 a 與 b。由斜率$a=\frac{4\pi^2}{g}$ 可求得重力加速度值 $g=\frac{4\pi^2}{a}$。由截距$b=\frac{4\pi^2\ I_{c.m.}}{mg}=\frac{I_{c.m.}}{m}a$，可得通過質心的轉軸的物體轉動慣量

$$I_{c.m.}=m\frac{b}{a} \tag{21}$$

對於均勻棒狀的物體，若其質量為 m，長度為 L，繞著通過質心且垂直於棒子的轉軸轉動，則棒子的質心轉動慣量

$$I_{c.m.}=\frac{1}{12}mL^2 \tag{22}$$

可將實驗結果用(21)式求得的質心轉動慣量，與(22)式的理論值比較。

2. 取出器材中有許多等距小孔的長木條，測量其質量與長度。(註: 需自備電子秤)
3. 取出器材中的迴紋針，用迴紋針的一側作為支撐軸將多孔木棒的中央放在支撐軸上，形成類似天平的結構。微調迴紋針位置使天平剛好平衡，此時迴紋針的位置即為多孔木棒的質心。在此位置用筆作記號。
4. 將迴紋針展開，用夾子固定到桌面支架邊緣，使迴紋針凸出一根金屬作為轉軸。選取多孔木棒上的一個小孔，插入轉軸，形成複擺。測量轉軸到質心的距離 d。
5. 輕推多孔木棒，使其以迴紋針轉軸小角度來回擺動。測量擺動平均週期 T。
6. 重複步驟 4、步驟 5，得到多個不同 質心距離 d 時的複擺 平均週期 T。
7. 整理數據，以 T^2d 作為 y 軸，d^2 作為 x 軸作圖，並做線性擬合，得到線性方程式 $y=a\,x+b$ 的係數 a 與 b。
8. 由斜率$a=\frac{4\pi^2}{g}$ 求得重力加速度值 $g=\frac{4\pi^2}{a}$。與g的理論值比較，求得誤差百分比。

9. 由(21)式求得多孔木棒質心轉動慣量的實驗值。
10. 由(22)式計算多孔木棒質心轉動慣量的理論值。(假設小孔對轉動慣量的影響可忽略)
11. 比較上述多孔木棒質心轉動慣量的實驗值與理論值，求得兩者相對誤差百分比。