扭擺實驗講義　版本 3.05 (2024.10)

112 年國科會科教實作學門計畫：數位輔助科教實作-振盪的探究實驗
計畫主持人：曾賢德

■ 計畫目的

本計畫以高中、大學為主要對象，以振盪現象為科學探究主軸，開發一系列可供動手操作的實驗，並結合數位化工具，可進行更好的定量紀錄分析及更深入的探究。實驗器材方面使用智慧型手機及 Phyphox 程式，讀取加速度感測器、陀螺儀、磁場感測器之訊號，結合雷射切割木板支架與容易取得的實驗零件，進行幾個振盪相關實驗。希望能啟發及引導學員將數位科技運用於科學探究上，並強化數據分析能力。

完整之教材內容共有四個實驗主題，包含單擺、簡諧運動、扭擺、耦合(韋伯福斯擺、板彈簧振盪與耦合)。

本教材為實驗主題三「扭擺」實驗，包含以下子實驗:

完整之教材內容共有四個實驗主題，包含單擺、簡諧運動、扭擺、耦合(威伯福斯擺、板彈簧振盪與耦合)。

本教材為實驗主題一「單擺」實驗，包含以下子實驗:

實驗 3A: 探究扭擺週期 T 與細線長度 L 的關係

實驗 3B: 扭擺週期 T 與轉動慣量變化$\Delta \boldsymbol{I}$的關係

實驗 3C: 測量扭擺振幅衰減如何受空氣阻力影響

其他實驗主題請見其他講義。講義雲端資料夾:

https://drive.google.com/drive/folders/1_YnEaS9zeoATjzgVf_6HyjWRzk3gOuxu?usp=sharing

更多計畫成果可參考 自造實驗基地計畫 網址: https://sites.google.com/view/lab-maker

■ 原理

簡述:

扭擺(Torsion Pendulum)通常是用一根細線懸吊物體，因為細線的扭力很小，物體來回扭轉(旋轉振盪)的週期通常很長。也因為細線扭力甚小，不容易測它的扭力常數，因此可透過測量扭擺週期推得扭力常數，進而可以測得微小的力量產生的力矩。例如庫倫(Coulomb)測量靜電作用力、卡文迪希(Henry Cavendish)測量實驗室中兩個物體之間的萬有引力，都是使用扭擺。本實驗中，使用橡皮筋作為扭擺細線，懸掛手機擺錘架，使擺錘來回旋轉振盪，並探究週期如何隨擺錘的轉動慣量及扭擺細線的長度而改變。

[註: 做過實驗 3A 或 3B 之後，可以嘗試將橡皮筋的扭擺細線改成其他材質或物體，例如改用棉繩，或改用彈簧，以類似實驗方法得到自選的扭擺擺線的扭力常數。]

公式與推導:

- 扭擺週期 [適合高二以下]

  當一根細線懸吊物體時，若物體以細線(垂直軸)為轉軸轉動一個角度，則細線因為扭轉而產生與旋轉角度相反方向的力矩，使物體來回振盪。在旋轉角度不大時，力矩τ與 角度θ 的大小呈正比(類似虎克定律)，兩者的關係可寫成

$$\tau = -\kappa\theta \tag{1}$$

其中，角度θ 是從平衡角度(訂為 0 度)算起的旋轉角度，單位為徑度 rad。力矩τ 是施力半徑乘上施力，單位為牛頓·米(N·m)半徑。力矩τ 與 角度θ 之間的比例為 扭力常數κ (單位為 N·m/rad)，其類似彈簧系統中的彈力係數 k。若懸吊的物體(擺錘)的轉動慣量為 I，則擺錘來回扭轉的週期 T 可寫成

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\kappa}} \tag{2}$$

上式與簡諧運動的週期公式 $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ 很相似。其中，轉動慣量 I 的概念是物體轉動的慣性，類似簡諧運動中物體移動的慣性為質量 m。不過，轉動慣量 I 不僅與物體總質量 m 有關，也跟此質量距離轉軸多遠(距離 r)有關。因此，即使擺錘質量維持一樣，但改變擺錘上的配重位置(例如改變螺絲與細線轉軸的距離 r)，也會改變轉動慣量 I，進而影響週期。[註: 轉動慣量相關原理可參考實驗 1E:複擺實驗]

若對(2)式等號兩邊同時取平方，可得

$$T^2 = 4\pi^2\frac{I}{\kappa} = \left(\frac{4\pi^2}{\kappa}\right)I \tag{3}$$

由(3)式可知，週期平方 (T^2) 與 轉動慣量 I 成正比，且可由 T^2 對 I 作圖的斜率 $\left(\frac{4\pi^2}{\kappa}\right)$，求得 扭力常數$\kappa$。

- 扭擺週期公式進階推導 [適合高三、大專以上]

考慮細線扭轉時產生的力矩與角度成正比，$\tau = -\kappa\theta$，此力矩作用在轉動慣量為 I 的擺錘上，由類似牛頓第二定律的轉動公式可得

$$\tau = I\alpha = I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\kappa\theta \tag{4}$$

此式可改寫成

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{\kappa}{I}\theta = 0 \tag{5}$$

(5)式的解可表示成：

$$\theta(t) = A\sin(\omega_0 t + \emptyset) \tag{6}$$

亦即 角度θ 隨 時間 t 作簡單的正弦(或餘弦)變化，A 為運動中最大的角度，稱為振幅(Amplitude)；ω_0為振盪的角頻率；ϕ為物體運動的起始相位。振幅 A 和起始相位ϕ 可由起始條件($t=0$ 時)的運動狀態決定。在知道函數 $\theta(t)$ 後，運動中的其他物理量，像角速率、動能、位能等，都能由此求出。

若(6)式要滿足為(5)式方程式的解，則需要使$\omega_0{}^2 = \frac{\kappa}{I}$，或

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\kappa}{I}} \tag{7}$$

因為振盪角頻率$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$，因此$\frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{\kappa}{I}}$，可得(2)式: 週期 $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\kappa}}$。

- 改變轉動慣量，由振盪週期變化，求得 扭力常數κ 與 原擺錘轉動慣量 I_0

　　在扭擺系統中，擺錘架本身有質量與轉動慣量。若將擺錘架不加質量時的轉動慣量稱為 原擺錘轉動慣量 I_0，當把一些質量加到擺錘上，則系統增加了一些轉動慣量

$$\Delta I = \sum_i m_i {r_i}^2 \tag{8}$$

其中，m_i 為第 i 個物體的質量，r_i 為第 i 個物體距離轉軸的半徑。擺錘總轉動慣量 I 變成

$$I = I_0 + \Delta I = I_0 + \sum_i m_i {r_i}^2 \tag{9}$$

由上式可知，即使擺錘質量不變(不取下物體 m)，僅改變物體 m 的位置 r 也會使系統的轉動慣量 I 改變。

　　結合(9)式與(3)式，可得

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{\kappa}\right) I = \left(\frac{4\pi^2}{\kappa}\right)(I_0 + \Delta I) = \left(\frac{4\pi^2}{\kappa}\right)\Delta I + \left(\frac{4\pi^2}{\kappa} I_0\right) \tag{10}$$

由上式可知，週期平方 (T^2) 與 轉動慣量變化(ΔI)呈線性關係，亦即若將 週期平方 (T^2) 作為 y 值，轉動慣量變化($\Delta I = \sum_i m_i {r_i}^2$) 作為 x 值，則週期平方 ($T^2$) 對 轉動慣量變化$\Delta I$ 的數據在 x-y 圖中會是直線的關係，且可以在數據擬合時使用線性方程式 $y = a\,x + b$ 來描述。其中，斜率 $a = \left(\frac{4\pi^2}{\kappa}\right)$，因此可以從斜率 a 得到扭力常數的實驗值 $\kappa = \left(\frac{4\pi^2}{a}\right)$。而常數項(擬合線與 y 軸交點) $b = \left(\frac{4\pi^2}{k} I_0\right)$，由此可得原擺錘轉動慣量的實驗值 $I_0 = b/\left(\frac{4\pi^2}{\kappa}\right) = b/a$。

- 扭力常數κ 與 細線長度 L 的關係

　　如果某一力矩施加在長度為 L 的細線上，會使細線扭轉θ角，則同樣的細線串聯在一起時(細線長度變成 $2L$)，此力矩會讓上半段長度為 L 的細線扭轉θ角，也讓下半段長度為 L 的細線扭轉θ角，串聯在一起後的總扭轉角度為2θ角。亦即施加力矩τ時，當細線長度變成 2 倍，扭轉角度也會變成 2 倍，此時扭力常數κ變成原來的一半($\kappa/2$)。
類似的計算，可推得扭力常數κ與細線長度 L 應該會成反比，可寫成:

$$\kappa = \frac{\alpha}{L} \tag{11}$$

對於同樣的細線，α為一定值。將此關係帶入(3)式，可得

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{\kappa}\right) I = \left(\frac{4\pi^2}{\alpha} I\right) L \tag{12}$$

亦即，在擺錘總轉動慣量 I 不變時，週期平方 (T^2) 與 細線長度 L 成正比。將T^2 對 L

作圖及作線性擬合，應該會得到過原點的比值關係: y＝ax，係數 $a=\left(\frac{4\pi^2}{\alpha}I\right)$。若知道擺錘總轉動慣量 I (可依前述原理由實驗得到，或由理論計算得到)，則可得 $\alpha=\left(\frac{4\pi^2}{a}I\right)$。如此即可由(11)式得到各種細線長度 L 的扭擺的扭力常數κ。

- 考慮有阻力時，振幅隨時間的衰減

　　如果扭擺在轉動時有摩擦力造成能量損耗，則振盪的振幅會越來越小。若考慮一個摩擦力 f 作用在距離轉軸半徑 r_f 的地方，且摩擦力的方向為切線方向，則會產生一個阻力力矩$\tau_f=r_f\times f$。如果阻力力矩τ_f跟轉動時的角速率$\omega=\frac{d\theta}{dt}$ 成正比，且可寫成$\tau_f=-\beta\omega$，β為一定值，稱為阻力係數。其負號表示阻力力矩與轉動角速率的方向相反，會使角速率減慢，則(4)式可改寫成

$$\tau=I\alpha=I\frac{d^2\theta}{dt^2}=-\kappa\theta+\tau_f=-\kappa\theta-\beta\omega \tag{13}$$

此式可改寫成

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{\beta}{I}\frac{d\theta}{dt}+\frac{\kappa}{I}\theta=0 \tag{14}$$

這個二次微分方程式的解，是

$$\theta(t)=Ae^{-t/(I/\beta)}\sin(\omega_r t+\emptyset) \tag{15}$$

跟(6)式比較，可知最大的不同在於有阻力時振盪振幅會隨時間 t 逐漸變小。振幅變化的行為為指數衰減(exponential decay): $Ae^{-t/(I/\beta)}=Ae^{-t/(\tau)}$，且振幅每經過 $\tau=I/\beta$ 的時間就會變成$e^{-1}=\frac{1}{e}=\frac{1}{2.71828}=0.368$倍。或是每經過 $\frac{I}{\beta}\ln(2)$的時間振幅就會減半，減半所需的時間稱為半衰期$t_{1/2}$，亦即

$$t_{1/2}=\frac{I}{\beta}\ln(2)=0.693\frac{I}{\beta} \tag{16}$$

τ 稱為指數衰減的時間常數(time constant)，在此實驗中

$$\tau=I/\beta \tag{17}$$

亦即 衰減時間常數τ 與 阻力係數β 呈反比。阻力越大或轉動慣量 I 越小，振幅衰減得越快。

- 考慮有阻力時，角速率ω隨時間 t 的變化與角速率振幅的衰減

(6)式: $\theta(t)=A\sin(\omega_0 t+\emptyset)$ 說明角度θ會隨時間 t 變化，最大角度(振幅)為 A。可定義角度隨時間的變化率 $\omega=\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$ 稱為角速率。若時間變化Δt甚小，角度在Δt時間內的變化量$\Delta\theta$也會很小，公式可寫為 $\omega=\frac{d\theta}{dt}$，亦即角速率$\omega$等於角度$\theta$對時間 t 微分。將(6)式的等式左右取時間微分，可得 $\omega=\frac{d\theta}{dt}=A\omega_0\cos(\omega_0 t+\emptyset)$。亦即陀螺儀功能測得的角速率(角頻率 ω)變化會是角速率振幅 $A\omega_0=\frac{2\pi A}{T}$ 乘上一個餘弦(cos)函數，其以週期 T 來回變化。不過，當空氣阻力出現時，振幅 A 會指數衰減，如(15)式中$Ae^{-t/(I/\beta)}$，因此陀螺儀

測得的角速率變化的振幅也會呈指數衰減變化 $\frac{2\pi A}{T}e^{-t/(I/\beta)}$。角速率振幅衰減的半衰期 $t_{1/2}$ 同(16)式: $t_{1/2} = 0.693\frac{I}{\beta}$，因此可以角速率振幅衰減的半衰期得到阻力係數$\beta$。或是直接由 **角速率振幅** $\frac{2\pi A}{T}e^{-t/(I/\beta)}$ 對 **時間 t** 作圖，由得到的數據作指數擬合，即可得衰減時間常數 $\tau = I/\beta$。

[進階探究問題] 上面假設阻力力矩跟角速率成正比，$\tau_f = -\beta\omega$，但有沒有可能阻力力矩是跟角速率平方成正比，$\tau_f = -\beta\omega^2$，或是更複雜的形式?從實驗數據中是否能推得阻力的形式?

[進階探究問題] 實驗中可使用剪開的橡皮筋，作為一條扭擺擺繩。但若沒有剪開橡皮筋，而是一圈橡皮筋拉長，則會有兩根並排的橡皮筋構成扭擺擺繩。在轉動角度較大時，兩根橡皮筋互繞，此時力矩與角度之間是否仍滿足正比關係? 即使是剪開的單根橡皮筋，在轉動角度甚大時是否仍滿足力矩與角度成正比關係?

■ 實驗步驟

- **實驗 3A: 探究扭擺週期 *T* 與細線長度 *L* 的關係**

1. 看以下影片教學或老師示範，學習如何架設扭擺實驗裝置，測量週期。
   教學影片: 扭擺實驗 架設器材與測量週期 (https://youtu.be/-cKME28LgGc)
2. 看以下影片教學或老師示範，學習如何加上手機及改變扭擺擺線。
   教學影片: 扭擺實驗 改變扭擺擺線 (https://youtu.be/l2_TLYrN18o)
3. 將手機與擺錘架結合，注意勿摔到手機。將一條橡皮筋剪開成一根扭擺擺線，將橡皮筋擺線一端穿入擺錘架上方的小孔，繞過木片再以夾子固定，確認有固定妥當避免鬆脫。橡皮筋擺線另一端可取適當長度卡進桌面支架邊緣的溝槽，多餘的橡皮筋繞到支架適當位置，以夾子固定好，確認有固定妥當避免鬆脫。
4. 以尺測量橡皮筋擺線懸掛著擺錘架時的長度 L。測量長度的起點與終點是擺錘架上緣到桌面支架下緣之間的橡皮筋擺線。測量時小心勿拉到扭擺系統，以免影響擺線長度。
   [註: 也可以改以橡皮筋原長(不被施力拉長時)作為長度 L。雖然與上述固定施力的長度不同，但敘述清楚且與後續實驗一致即可。]
5. 轉動擺錘架適當圈數，執行手機應用程式 phyphox 中的陀螺儀功能，釋放擺錘架使扭擺穩定來回轉動，同時以手機紀錄扭擺轉動時的角速率變化。
6. 經過適當時間的紀錄，由角速率隨時間振盪變化的數據，得到振盪週期 T。將週期 T 與長度 L 的實驗數據紀錄於實驗記錄簿(及試算表)上。
7. 調整橡皮筋擺線長度 L，重複上述步驟 4~6，得到至少 5 個不同橡皮筋擺線長度的實驗結果。
8. 畫出振盪週期 T 隨長度 L 的變化關係圖。畫出振盪週期平方(T^2)與長度 L 的關係圖，以線性擬合得到斜率。[思考: 此處應該用 y= a x + b 擬合，或是 y= a x 擬合?]
9. [進階] 由(12)式可知此上面得到的斜率值 a 應等於$\left(\frac{4\pi^2}{\alpha}I\right)$。若由其他方法(例如實驗 3B，或由理論計算)求得轉動慣量 I 時，可得到係數 $\alpha = \left(\frac{4\pi^2}{\mathrm{a}}I\right)$。如此即可由(11)式 $\kappa = \frac{\alpha}{L}$ 得到各種細線長度 L 的扭擺的扭力常數κ。
10. **[進階探究] 將橡皮筋的扭擺細線改成其他材質或物體，例如改用棉繩，或改用彈簧，以類似實驗方法得到自選的扭擺擺線的扭力常數。**

- **實驗 3B: 扭擺週期 T 與 轉動慣量變化 ΔI 的關係**

1. 看以下影片教學或老師示範，學習如何改變轉動慣量。
   教學影片: 扭擺實驗 改變轉動慣量 (https://youtu.be/LVPPAqBaQPw)
2. 組合擺錘架，包含放上橫向孔洞木架。將手機與擺錘架結合，注意勿摔到手機。將一條橡皮筋剪開成一根扭擺擺線，將橡皮筋擺線一端穿入擺錘架上方的小孔，繞過木片再以夾子固定，確認有固定妥當避免鬆脫。橡皮筋擺線另一端可取適當長度卡進桌面支架邊緣的溝槽，多餘的橡皮筋繞到支架適當位置，以夾子固定好，確認有固定妥當避免鬆脫。
3. 測量 1 組螺絲的質量 m。(或參考材料表上提供的數值)
4. 在擺錘架的橫向木架較靠近手機的孔洞上，左右對稱孔洞各放上 3 組螺絲。
5. 以尺測量橡皮筋擺線懸掛著擺錘架(含手機)時的長度 L。測量長度的起點與終點是擺錘架上緣到桌面支架下緣之間的橡皮筋擺線。測量時小心勿拉到扭擺系統，以免影響擺線長度。
   註: 後面的步驟不改變擺線長度 L，也不改變放上的螺絲數量(例如維持左右各 3 組)，僅改變螺絲到中心軸的距離。
6. 以尺測量左右各組螺絲到中心軸的距離 r，由(9)式計算出螺絲貢獻的 轉動慣量變化 $\Delta I = \sum_i m_i {r_i}^2$。例如各組螺絲質量都為 m，3 組(3 對)螺絲中央到中心軸距離分別為r_1、r_2、r_3，則$\Delta I = \sum_i m_i {r_i}^2 = 2m{r_1}^2 + 2m{r_2}^2 + 2m{r_3}^2 = 2m({r_1}^2 + {r_2}^2 + {r_3}^2)$。
7. 轉動擺錘架適當圈數，執行手機應用程式 phyphox 中的陀螺儀功能，釋放擺錘架使扭擺穩定來回轉動，同時以手機紀錄扭擺轉動時的角速率變化。
8. 經過適當時間的紀錄，由角速率隨時間振盪變化的數據，得到振盪週期 T。將 轉動慣量變化ΔI 與 週期 T 數據紀錄於實驗記錄簿(及試算表)上。
9. 改變轉動慣量變化ΔI。例如調整 1 對螺絲的位置(3 對螺絲仍維持左右對稱)，原本在r_1處的 1 對螺絲，改移到更外面的r_4位置，則轉動慣量變化變成$\Delta I = 2m({r_2}^2 + {r_3}^2 + {r_4}^2)$。重複步驟 7、8，於實驗記錄簿(及試算表)上紀錄新得到的 轉動慣量變化ΔI 與 週期 T 數據。
10. 重複以上步驟，得到 3 組以上不同的 轉動慣量變化ΔI 與 週期 T 數據。作圖: 以週期平方(T^2) 作為 y 值，轉動慣量變化($\Delta I = \sum_i m_i {r_i}^2$) 作為 x 值，得到關係圖。依據式(10)，此兩者應呈線性關係。使用線性方程式 $y = a\,x + b$ 作線性擬合，得到斜率 a 與截距 b。
11. 依據式(10)，斜率 $a = \left(\frac{4\pi^2}{\kappa}\right)$，求出**扭力常數的實驗值** $\boldsymbol{\kappa} = \left(\frac{\mathbf{4\pi^2}}{\boldsymbol{a}}\right)$。截距 $b = \left(\frac{4\pi^2}{k} I_0\right)$，求出不含外加螺絲時的擺錘轉動慣量 $I_0 = b/\left(\frac{4\pi^2}{k}\right) = b/a$。
12. [進階] 由實驗 3A 的步驟 9 得到的斜率值$\left(\frac{4\pi^2}{\alpha} I\right)$，以及本實驗得到的轉動慣量$I_0$，可得係數$\alpha$。再由(12)式$\kappa = \frac{\alpha}{L}$ 可得到 扭力常數κ。將此得到的 扭力常數κ 與上面步驟 11 得到的扭力常數κ 作比較。[思考: 如果兩個實驗用同樣一段扭擺擺線，兩個實驗得到的 扭力常數κ 應該一樣嗎? 如果不一樣，可能是什麼原因造成?]
13. **[進階探究] 將橡皮筋的扭擺細線改成其他材質或物體，例如改用棉繩，或改用彈簧，以類似實驗方法得到自選的扭擺擺線的扭力常數。**

- **實驗 3C: 測量扭擺振幅衰減如何受空氣阻力影響**

1. 看以下影片教學或老師示範，學習如何利用阻力片改變空氣阻力。
   教學影片: 扭擺實驗 改變空氣阻力 (https://youtu.be/UfYh4AyT7Bw)
2. 將手機與擺錘架結合，接上扭擺擺線，懸掛到桌面支架邊緣。轉動擺錘架適當圈數，執行手機應用程式 phyphox 中的陀螺儀功能，釋放擺錘架使扭擺穩定來回轉動，同時以手機紀錄扭擺轉動時的角速率(角頻率 ω)隨時間 t 的變化。
3. 由步驟 2 所得的角速率隨時間變化，找出幾個角速率的峰值(局部最高或最低點處，即角速率振幅)位置，紀錄其角速率 ω (角速率振幅)與時間 t。
4. 以上述步驟得到的峰值(角速率振幅)為 y 值，時間 t 為 x 值作圖，應該會得到一個指數衰減的關係圖。將數據作指數擬合 (擬合函數 $y = a\, e^{bx}$)，得到擬合參數 b (註: 此處的 b 值為負值)。並求得 指數衰減的時間常數 $\tau = 1/|b|$。
5. 由式(17)可知 $\tau = I/\beta$，因此 阻力係數$\beta = |b|\, I$，亦即參數 b 的絕對值|b|越大對應到越大的阻力係數β。如果從之前的實驗(例如實驗 3B)得到手機與擺錘架結合時的 轉動慣量 I_0，則可求得 阻力係數$\beta = |b|\, I_0$。
6. 在擺錘架的橫向木架較遠的 2 個距離對稱的孔洞上，各插上 1 個風阻片(表面朝向迎風面)以增加阻力係數。重複步驟 2~5，得到此時的擬合參數 b (或阻力係數β)。
7. [探究] 可改變風阻片的角度，探究風阻片角度對擬合參數 b (或阻力係數β)的影響。
8. [探究] 可改變風阻片與扭擺轉軸之間的距離(改插到比較近的孔洞)，亦即改變風阻的施力半徑，探究風阻片距離對擬合參數 b (或阻力係數β)的影響。
9. [進階探究] 可改變風阻片的數量(同時也改變了面積與施力半徑)，以及角度等等變因，探究其對擬合參數 b (或阻力係數β)的影響。